3. Einfache Darstellung von salzsaurem Kreatinin aus Harn.

Von **Richard Maly.**

Auf folgende Art kann man sich in bequemer Weise salzsaures Kreatinin aus Harn in grossen Krystallgruppen darstellen. Menschenharn, von dem man aber natürlich grössere Mengen, doch einige Liter nehmen muss, wird auf ein Drittel oder Viertel abgedampft, von den ausschiedenen Salzen abgegossen, mit Bleizucker gefällt und das überschüssige Blei aus dem Filtrate durch kohlensaures Natron oder Schwefelwasserstoff entfernt. Das Filtrat wird annähernd neutralisirt, im ersten Falle mit Essigsäure, im zweiten mit Soda und nun mit concentrirter Sublimatlösung gefällt. Dieser Niederschlag ist der Hauptmasse nach eine Verbindung von Kreatinin mit Quecksilberchlorid, wird unter Wasser mit Schwefelwasserstoff zerlegt, die Flüssigkeit mit Thierkohle entfärbt und abgedampft. Die bleibende Krystallmasse wird aus starkem Alkohol ein- oder zweimal umkrystallisirt. Man erhält weisse Krystallkrusten oder grosse harte glänzende Prismen.

Die Substanz gibt mit Schwefelsäure übergossen dicke Salzsäuredämpfe, löst sich sehr leicht in Wasser, etwas schwieriger in Alkohol, und gibt mit Platinchlorid ein oranges Doppelsalz. Auch aus Pferdeharn wurde dasselbe Resultat erhalten.

Als Probe der Reinheit folgende Analyse:

0·2734 Gramm Krystalle aus Menschenharn gaben 0·3204 Gramm CO_2 und 0·1328 Gramm H_2O

Salzsaures Kreatinin enthält:		Gefunden
C	32·10%	31·96%
H	5·35%	5·39%

Über rationale Raumcurven vierter Ordnung.

Von **Emil Weyr** in Mailand.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. März 1871.)

1. In der zweiten geometrischen Mittheilung (Mai-Heft 1870) wurde eine einfache Beziehung zwischen den Parametern dreier in gerader Linie liegender Punkte einer rationalen (mit einem Doppelpunkt versehenen) Curve dritter Ordnung entwickelt, welche in der daselbst aufgestellten Gleichung (1) ihren Ausdruck fand.

Diese Gleichung spricht nichts anderes als das Abel'sche Theorem für Curven dritter Ordnung in jener Form aus, welche es für Curven mit einem Doppelpunkte, d. h. für rationale Curven dritter Ordnung annimmt, und überdies für jenen Fall, wo man die Curve mit einer Geraden in Verbindung setzt. Es dürfte vielleicht nicht uninteressant sein zu sehen, dass eine ähnliche Beziehung für die rationalen Raumcurven vierter Ordnung besteht.

2. Eine rationale Raumcurve vierter Ordnung ist eine solche, für welche sich die homogenen Coordinaten ihrer Punkte durch ganze, rationale Functionen eines einzigen Parameters ausdrücken lassen. Es ist dies die sogenannte Curve vierter Ordnung zweiter Art. Sind also x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten eines Punktes M unserer rationalen Curve C, und ξ der dem Punkte entsprechende Parameterwerth, so muss sein:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1\xi^4 + b_1\xi^3 + c_1\xi^2 + d_1\xi + e_1 \\ x_2 &= a_2\xi^4 + b_2\xi^3 + c_2\xi^2 + d_2\xi + e_2 \\ x_3 &= a_3\xi^4 + b_3\xi^3 + c_3\xi^2 + d_3\xi + e_3 \\ x_4 &= a_4\xi^4 + b_4\xi^3 + c_4\xi^2 + d_4\xi + e_4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

wobei die a, b, nur von der Curve C abhängige constante Grössen sind. Bringen wir die Curve C mit der Ebene:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0 \qquad \text{(II)}$$

in Verbindung, so erhalten wir, die x-Werthe aus I in II gesetzt, für ξ die Gleichung vierten Grades:

$$\xi^4\Sigma\alpha_i a_i + \xi^3\Sigma\alpha_i b_i + \xi^2\Sigma\alpha_i c_i + \xi\Sigma\alpha_i d_i + \Sigma\alpha_i e_i = 0 \qquad \text{(III)}$$

wobei abkürzend:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = \Sigma\alpha_i a_i \text{ u. s. f.}$$

gesetzt worden ist.

Die Gleichung III ist in ξ vom vierten Grade, wie es auch sein muss, da die Ebene mit der Curve vier Punkte gemeinschaftlich hat. Die vier Wurzeln ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 der Gleichung III sind somit die Parameter der vier Curvenpunkte M_1, M_2, M_3 M_4, welche in der Ebene II liegen. Setzt man der Kürze halber:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = (\xi)_1$$
$$\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 + \xi_1\xi_4 + \xi_2\zeta_4 + \xi_3\xi_4 = (\xi)_2$$
$$\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_3\xi_4 + \xi_3\xi_4\xi_1 + \xi_4\xi_1\xi_2 = (\xi)_3$$
$$\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = (\xi)_4$$

so hat man bekanntlich in Bezug auf die letzte Gleichung:

$$(\xi)_1 = -\frac{\Sigma\alpha_i b^i}{\Sigma\alpha_i a_i}$$

$$(\xi)_2 = +\frac{\Sigma\alpha_i c_i}{\Sigma\alpha_i a_i}$$

$$(\xi)_3 = -\frac{\Sigma\alpha_i d_i}{\Sigma\alpha_i a_i}$$

$$(\xi)_4 = +\frac{\Sigma\alpha_i e_i}{\Sigma\alpha_i a_i}$$

Setzt man rechter Hand die eigentlichen Werthe für die symbolischen Ausdrücke, so kann man diese Gleichungen in der Form schreiben:

$$\alpha_1[b_1+a_1(\xi)_1] + \alpha_2[b_2+a_2(\xi)_1] + \alpha_3[b_3+a_3(\xi)_1] + \alpha_4[b_4+a_4(\xi)_1]=0$$
$$\alpha_1[c_1-a_1(\xi)_2[+ \alpha_2[c_2-a_2(\zeta)_2] + \alpha_3[c_3-a_3(\xi)_2] + \alpha_4[c_4-a_4(\xi)_2]=0$$
$$\alpha_1[d_1+a_1(\xi)_3] + \alpha_2[d_2+a_2(\xi)_3] + \alpha_3[d_3+a_3(\xi)_3] + \alpha_4[d_4+a_4(\xi)_4]=0$$
$$\alpha_1[e_1-a_1(\xi)_4] + \alpha_2[e_2-a_2(\xi)_4] + \alpha_3[e_3-a_3(\xi)_4] + \alpha_4[e_4-a_4(\xi)_4]=0$$

Durch Elimination der vier homogen vorkommenden Constanten α der Ebene II erhält man folgende von der besonderen Lage der Ebene unabhängige Relation:

$$\begin{vmatrix} [b_1+a_1(\xi)_1], & [c_1-a_1(\xi)_2], & [d_1+a_1(\xi)_3], & [e_1-a_1(\xi)_4] \\ [b_2+a_2(\xi)_1], & [c_2-a_2(\xi)_2], & [d_2+a_2(\xi)_3], & [e_2-a_2(\xi)_4] \\ [b_3+a_3(\xi)_1], & [c_3-a_3(\xi)_2], & [d_3+a_3(\xi)_3], & [e_3-a_3(\xi)_4] \\ [b_4+a_4(\xi)_1], & [c_4-a_4(\xi)_2], & [d_4+a_4(\xi)_3], & [e_4-a_4(\xi)_4] \end{vmatrix} = 0$$

Zerlegt man die linker Hand stehende Determinante in ihre Addenden, so fallen alle bis auf fünf derselben weg, da sie allemal nach Heraushebung gemeinschaftlicher Factoren mindestens zwei identische Columnen besitzen.

Der übrig bleibende Theil liefert die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} b_1c_1d_1e_1 \\ b_2c_2d_2e_2 \\ b_3c_3d_3e_3 \\ b_4c_4d_4e_4 \end{vmatrix} + (\xi)_1 . \begin{vmatrix} a_1c_1d_1e_1 \\ a_2c_2d_2e_2 \\ a_3c_3d_3e_3 \\ a_4c_4d_4e_4 \end{vmatrix} - (\xi)_2 . \begin{vmatrix} b_1a_1d_1e_1 \\ b_2a_2d_2e_2 \\ b_3a_3d_3e_3 \\ b_4a_4d_4e_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (\xi)_3 . \begin{vmatrix} b_1c_1a_1e_1 \\ b_2c_2a_2e_2 \\ b_3c_3a_3e_3 \\ b_4c_4a_4e_4 \end{vmatrix} - (\xi)_4 . \begin{vmatrix} b_1c_1d_1a_1 \\ b_2c_2d_2a_2 \\ b_3c_3d_3a_3 \\ b_4c_4d_4a_4 \end{vmatrix} = o.$$

Bestimmt man die Constanten A_1, A_2, A_3, A_4 aus den vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} b_1A_1 + c_1A_2 + d_1A_3 + e_1A_4 = a_1 \\ b_2A_1 + c_2A_2 + d_2A_3 + e_2A_4 = a_2 \\ b_3A_1 + c_3A_2 + d_3A_3 + e_3A_4 = a_3 \\ b_4A_1 + c_4A_2 + d_4A_3 + e_4A_4 = a_4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

so kann man obige Gleichung in der Form schreiben:

$$A_4(\xi)_4 - A_3(\xi)_3 + A_2(\xi)_2 - A_1(\xi)_1 = 1 \qquad \text{(V)}$$

„Diese Relation, welche von der schneidenden Ebene ganz unabhängig zwischen den vier Parametern $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ stattfindet, stellt also in der That

nichts anderes vor als die Bedingung, welche nothwendig und hinreichend ist, damit vier Punkte $M_1 M_2 M_3 M_4$ der Curve, denen jene vier Parameter entsprechen, in einer und derselben Ebene liegen."

Wie man sofort erkennt, ist die Grundrelation (V) symmetrisch in den vier Parametern und in jedem von ihnen nur vom ersten Grade, wie dies auch a priori hätte geschlossen werden können, wenn man bemerkt, dass drei beliebig gewählte Punkte der Curve eine Ebene, und somit auch deren vierten Schnittpunkt mit der Curve eindeutig bestimmen und dass, wenn die Bedingungsgleichung von einem Werthsystem erfüllt ist, sie von jeder Combination der vier Parameter des Systemes erfüllt werden muss.

3. Die Gleichung V kann uns auch über die wichtigsten Hauptcharaktere der von uns in Betracht gezogenen Curve C genügenden Aufschluss geben. Aus ihr ergibt sich zunächst für den Parameter des vierten Schnittpunktes M_4 der Curve mit einer, durch drei Punkte $M_1 M_2 M_3$ derselben gelegten Ebene der Ausdruck:

$$\xi_4 = -\frac{1 + A_1(\xi_1+\xi_2+\xi_3) - A_2(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1) + A_3\xi_1\xi_2\xi_3}{A_1 - A_2(\xi_1+\xi_2+\xi_3) + A_3(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1) - A_4\xi_1\xi_2\xi_3} \quad \text{(VI)}$$

Hieraus folgt zunächst, dass der Gleichung (V) ein ganz beliebiger Werth von ξ_4 mit den drei Werthen $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ genügt, sobald gleichzeitig:

$$\left.\begin{aligned} 1 + A_1(\xi_1+\xi_2+\xi_3) - A_2(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1) + A_3\xi_1\xi_2\xi_3 = 0 \\ A_1 - A_2(\xi_1+\xi_2+\xi_3) + A_3(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1) - A_4\xi_1\xi_2\xi_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII)}$$

denn in der That verschwinden dann in der rechten Seite von VI Zähler und Nenner unabhängig von einander und ξ_4 kann jeden beliebigen Werth annehmen. Es liegen in diesem Falle also die drei Punkte $M_1 M_2 M$ der Curve mit jedem beliebigen vierten Punkte in einer und derselben Ebene und folglich müssen erstere in einer und derselben Geraden liegen. Wenn also die Gleichungen VII erfüllt sind, so befinden sich die drei Curvenpunkte $M_1 M_2 M_3$, deren Parameter $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ sind, in einer und derselben Geraden. Da man einen der drei Parameter willkürlich annehmen

kann, dann aber die beiden anderen der Symmetrie wegen eindeutig bestimmt werden können, so erhalten wir den bekannten Satz: „Durch jeden Punkt der Curve C geht eine Gerade, welche die Curve in zwei weiteren Punkten schneidet."

Eine solche Gerade nennen wir eine dreipunktige Secante der Curve. Alle dreipunktigen Secanten der Curve C erfüllen — wie wir auch später ganz unabhängig sehen werden — die einzige Fläche zweiten Grades, welche sich durch die Curve C legen lässt [1]. Setzt man in den zwei Gleichungen VII:

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = \lambda,$$

so ergibt sich sofort aus denselben:

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3 = \frac{\lambda(A_2A_4-A_3^2)-A_1A_2-A_3}{A_1A_3-A_2^2}$$

$$\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1 = \frac{\lambda(A_1A_4-A_2A_3)-A_1^2-A_2}{A_1A_3-A_2^2}.$$

Man kann daher drei Werthe ξ_1, ξ_2, ξ_3, welche den Gleichungen VII genügen, als die drei Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\xi^3+\xi^2\frac{A_1A_2+A_3+\lambda(A_3^2-A_2A_4)}{A_1A_3-A_2^2}+\xi\frac{\lambda(A_1A_4-A_2A_3)-A_1^2-A_2}{A_1A_3-A_2^2}+\lambda = 0$$

betrachten, welche sich in die Form bringen lässt:

$$\begin{aligned}&[\xi^3(A_1A_3-A_2^2)+\xi^2(A_1A_2+A_3)-\xi(A_1^2+A_2)]+\\&+\lambda[\xi^2(A_3^2-A_2A_4)+\xi(A_1A_4-A_2A_3)+(A_1A_3-A_2^2)] = 0\end{aligned} \qquad \text{(VIII)}$$

Diese Gleichung ist aber offenbar die Gleichung einer kubischen Involution, da jedem Werthe von λ drei ξ-Werthe entsprechen, während umgekehrt ein ξ-Werth unzweideutig den entsprechenden λ-Werth liefert. Wir können daher den Satz aussprechen:

---

[1] Bekanntlich ist der Unterschied zweier Curven vierter Ordnung erster und zweiter Art darin gelegen, dass sich durch erstere unendlich viele und durch letztere nur eine einzige Fläche zweiter Ordnung legen lässt.

„Die Punkttripel, welche die dreipunktigen Secanten der Curve C auf derselben bestimmen, bilden eine kubische Involution.“

Diese kubische Involution wird wie jede andere vier Doppelelemente besitzen, d. h. vier Punktgruppen, in denen je zwei Punkte zusammenfallen. Eine dreipunktige Secante aber, welche die Curve in zwei unendlich nahen Punkten schneidet, ist eine Tangente an der betrachteten Stelle; wir sehen also:

„Die Curve C besitzt vier Tangenten, welche sie überdies schneiden.“ Die Berührungspunkte dieser Tangenten sind die Doppelpunkte der eben betrachteten kubischen Involution.

4. Denken wir uns die zwei Punkte M_3, M_4 fest, so werden die variablen Punkte M_1, M_2 durch Ebenen eines Büschels auf der Curve C bestimmt, dessen Axe die zweipunktige Secante $\overline{M_3 M_4}$ ist. Die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Parametern ξ_1, ξ_2 von M_1, M_2 bestehen muss, ist in VII dargestellt, wenn man nur ξ_3 und ξ_4 als constant betrachtet. Man kann dann diese Gleichung in der Form schreiben:

$$\begin{aligned}\xi_1\xi_2[A_4\xi_3\xi_4-A_3(\xi_3+\xi_4)+A_2]-(\xi_1+\xi_2)[A_3\xi_3\xi_4-A_2(\xi_3+\xi_4)+A_1]+\\ +[A_2\xi_3\xi_4-A_1(\xi_3+\xi_4)-1]=0\end{aligned} \qquad \text{(VII)}'$$

woraus, da in ihr ξ_1 und ξ_2 jedes nur linear vorkommt und überdies beide in symmetrischer Verbindung, sofort hervorgeht, dass die beiden Punkte M_1, M_2 zwei projectivische und gleichzeitig vertauschungsfähige Reihen, also eine quadratische Involution auf der Curve beschreiben:

„Die Ebenen eines Büschels, dessen Axe eine zweipunktige Secante der Curve C ist, bestimmen auf der Curve Punktepaare einer quadratischen Involution.“

Die gefundene Involution wird zwei (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte besitzen, welche zwei Ebenen des Büschels entsprechen, die die Curve C berühren; jede dieser Ebenen enthält demnach eine Tangente der Curve, welche die Büschelaxe schneiden muss. Wir sehen daher, dass jede zweipunktige Secante der Curve zwei ihrer Tangenten schneidet. Überdies begegnet eine

solche Secante selbstverständlich den beiden Tangenten jener Punkte, in denen sie die Curve C schneidet, d. h. den Tangenten der Punkte M_3, M_4. Jede der beiden letzteren Tangenten ist doppelt zu zählen, d. h. als entstanden durch das unendlich nahe Rücken zweier die Büschelaxe $\overline{M_3 M_4}$ schneidenden Curventangenten. Wenn wir dies berücksichtigen, erhalten wir das Ergebniss, dass eine Gerade von sechs Tangenten unserer Curve geschnitten wird, d. h. dass der Rang der Curve, oder die Ordnung ihrer Developpablen gleich sechs ist.

Wenn die beiden Punkte M_3, M_4 unendlich nahe zu einander rücken, so wird die Büschelaxe $\overline{M_3 M_4}$ eine Tangente der Curve C; da jedoch die obige Betrachtung auch in diesem Falle vollständig zur Geltung kommt, so erhalten wir den Satz:

„Jede Tangente der Curve C wird von zwei anderen Tangenten geschnitten."

Da nun jede der beiden letzteren Tangenten mit der ersteren eine Ebene bestimmt, welche die Curve offenbar an zwei verschiedenen Stellen berührt, so kann man sagen:

„Durch jede Tangente der Curve C gehen zwei Doppeltangentenebenen."

Es ist klar, dass eine Doppeltangentenebene mit der Curve C ausser ihren beiden Berührungspunkten keinen weiteren Punkt gemeinschaftlich haben kann, weil sie sonst mit der Curve mehr als vier Punkte gemein hätte, was nicht angeht, da C nur von der vierten Ordnung ist.

Betrachtet man einen Punkt der Curve C als den Schnittpunkt zweier unendlich naher Tangenten derselben, so gehen durch jede derselben zwei doppelberührende Ebenen, welche auch selbstverständlich den Punkt enthalten werden. Hieraus ergibt sich das bekannte Resultat, dass durch jeden Punkt des Raumes vier Doppeltangentenebenen der Curve gehen, oder mit anderen Worten, dass die durch die Doppeltangentenebenen gebildete developpable Fläche von der vierten Classe ist.

5. Aus der Gleichung (VII)′ können wir sehr leicht die Bedingung für das Auftreten eines Doppelpunktes der Curve ausdrücken. Sind nämlich für den Augenblick ξ_3, ξ_4 die zwei Parameter, welche einem vorausgesetzten Doppelpunkte (resp. seinen beiden Nachbarpunkten) zukommen, so muss die Gleichung (VII)′

für jedes beliebige Werthepaar ξ_1, ξ_2 erfüllt werden, da doch je zwei beliebige Punkte mit dem Doppelpunkte in einer und derselben Ebene liegen. Es muss daher gleichzeitig:

$$A_4\xi_3\xi_4 - A_3(\xi_3+\xi_4) + A_2 = 0$$
$$A_3\xi_3\xi_4 - A_2(\xi_3+\xi_4) + A_1 = 0$$
$$A_2\xi_3\xi_4 - A_1(\xi_3+\xi_4) - 1 = 0$$

sein, woraus sich durch Elimination der Grössen $(\xi_3\xi_4)$, $-(\xi_3+\xi_4)$ die Bedingungsgleichung:

$$\left\{\begin{matrix} A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ -1 & A_1 & A_2 \end{matrix}\right\} = 0$$

ergibt, welche von den Constanten A oder respective a, b, c, erfüllt werden muss, falls die Curve C einen Doppelpunkt besitzen soll. In diesem Falle übergeht das die Curve enthaltende Hyperboloid in jenen Kegel zweiten Grades, welcher den Doppelpunkt zum Scheitel und die Curve zur Leitlinie hat. In der That ist jede Kante dieses Kegels eine dreipunktige Secante der Curve.

6. Rücken von den vier in einer Ebene liegenden Punkten $M_1 M_2 M_3 M_4$ der Curve C die beiden mittleren unendlich nahe zum ersten, so wird die Ebene zur Schmiegungsebene der Curve im Punkte M_1.

Wenn man also in VI $\xi_3 = \xi_2 = \xi_1$ setzt, so erhält man für den Schnittpunkt M_4 der Curve mit der Schmiegungsebene des Punktes M_1 den Parameterwerth:

$$\xi_4 = -\frac{1+3A_1\xi_1-3A_2\xi_1^2+A_3\xi_1^3}{A_1-3A_2\xi_1+3A_3\xi_1^2-A_4\xi_1^3} \qquad \text{(IX)}$$

Während diese Gleichung für ein gegebenes ξ_1 nur einen Werth von ξ_4 liefert, entspricht jedem ξ_4-Werth ein System von 3 ξ_1-Werthen, da die Gleichung IX in ξ_1 kubisch ist. Es lassen sich drei Schmiegungsebenen der Curve durch jeden ihrer Punkte legen.

„Durch jeden Punkt der Curve gehen drei ihrer Schmiegungsebenen.“

Da die Schmiegungsebene der Curve in dem betrachteten Punkte für drei unendlich nahe, durch den Punkt gehende Schmiegungsebenen gilt, so finden wir, dass durch ihn im Ganzen sechs Schmiegungsebenen gehen würden, wenn er beliebig im Raume läge. In der That ist die Curve vierter Ordnung zweiter Art bekanntlich von der sechsten Classe. Die Gleichung IX, geordnet nach ξ_1, erhält die Form:

$$\xi_1^3 - 3\xi_1^2 \frac{A_2 - A_3\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4} + 3\xi_1 \frac{A_1 - A_2\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4} + \frac{1 + A_1\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4} = 0 \qquad \text{(IX)}'$$

aus welcher sich drei Wurzeln $\xi_1{'}, \xi_1{''}, \xi_1{'''}$ für ξ_1 ergeben, welche nach früherem die Parameter der Schmiegungspunkte jener drei Schmiegungsebenen sein werden, die man durch den Punkt M_4, dessen Parameter ξ_4 ist, legen kann. Für diese drei Wurzeln hat man:

$$\xi_1{'} + \xi_1{''} + \xi_1{'''} = 3\frac{A_2 - A_3\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4},$$

$$\xi_1{'}\xi_1{''} + \xi_1{''}\xi_1{'''} + \xi_1{'''}\xi_1{'} = 3\frac{A_1 - A_2\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4},$$

$$\xi_1{'}\xi_1{''}\xi_1{'''} = -\frac{1 + A_1\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4}.$$

Bestimmt man nun mittelst Gleichung VI den vierten Schnittpunkt ξ^{IV} der Curve C mit der Ebene $(\xi_1{'}\xi_1{''}\xi_1{'''})$, so erhält man:

$$\xi^{\mathrm{IV}} = -\frac{1 + 3A_1\frac{A_2 - A_3\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4} - 3A_2\frac{A_1 - A_2\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4} - \frac{1 + A_1\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4}}{A_1 - 3A_2\frac{A_2 - A_3\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4} + 3A_3\frac{A_1 - A_2\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4} + A_4\frac{1 + A_1\xi_4}{A_3 - A_4\xi_4}}$$

oder aber nach kurzer Reduction:

$$\xi^{\mathrm{IV}} = \xi_4$$

so dass also die Ebene $(\xi_1{'}\xi_1{''}\xi_1{'''})$ durch den ursprünglich angenommenen Punkt geht. Dies gibt den bekannten Satz:

„Legt man durch einen Punkt der Curve C die drei möglichen Schmiegungsebenen, so liegen deren

drei Berührungspunkte mit ihm in einer und derselben Ebene."

Zu demselben Resultate gelangt man durch Projection der Curve C aus dem betrachteten Punkte auf eine Ebene. Man erhält nämlich eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte (welcher der Schnittpunkt der Bildebene mit der durch das Projectionscentrum gehenden dreipunktigen Secante ist) und da deren drei Inflexionspunkte (welche die Bilder der drei Punkte $\xi_1' \xi_1'' \xi_1'''$ sind) in einer und derselben Geraden liegen, so erhält man den ausgesprochenen Satz sofort wieder.

Schreibt man die Gleichung IX in der Form:

$$(1+3A_1\xi_1-3A_2\xi_1^2+A_3\xi_1^3)+\xi_4(A_1-3A_2\xi_1+3A_3\xi_1^2-A_4\xi_1^4)=o$$

so erkennt man sofort, dass das ξ_1-System eine kubische Involution darstellt, indem jedem ξ_4-Werth drei Werthe ξ_1 entsprechen.

„Durch jeden Punkt der Curve C geht eine Ebene, welche die Curve in drei solchen Punkten schneidet, dass deren Schmiegungsebenen durch den ersteren hindurch gehen. Die so erhaltenen Punktetripel bilden eine kubische Involution".

Da durch jeden Punkt der Curve eine einzige solche Ebene hindurchgeht, welche ein Tripel enthält, da man jedoch diesen Punkt auch zu einem und nur zu einem solchen Tripel rechnen kann, dessen Ebene dann selbstverständlich auch durch den Punkt hindurchgehen muss, so erkennen wir, dass durch jeden Punkt der Curve im Ganzen zwei solche Ebenen gehen, welche die Curve in oben betrachteten Punktetripeln schneiden. Alle diese Ebenen umhüllen daher eine Developpable zweiter Classe, d. h. einen Kegel zweiten Grades[1].

Die eben erwähnte kubische Involution besitzt vier Doppelpunkte, von denen sich leicht zeigen lässt, dass sie identisch seien mit den Doppelpunkten der in Art. 3 betrachteten Involution. In der That, wenn durch einen Punkt der Curve C drei Schmiegungsebenen gehen, für welche von den drei Berührungs-

[1] Siehe die Abhandlung Cremona's: Intorno alla curva gobba etc. Ann. d. Mat. tom IV, N. 2.

punkten derselben zwei unendlich nahe zu einander rücken, so ist die Schnittlinie der entsprechenden Schmiegungsebenen eine die Curve schneidende Tangente. Die Berührungspunkte der vier die Curve schneidenden Tangenten sind also wirklich nicht nur die Doppelpunkte der Involution des Art. 3, sondern auch der zuletzt betrachteten.

7. Eine Schmiegungsebene, welche vier unmittelbar auf einander folgende Punkte der Curve enthält, ist eine stationäre Ebene der Curve. Für unsere Curve werden wir daher die Parameter der Berührungspunkte stationärer Ebenen erhalten, wenn wir in Gleichung V $\xi_4 = \xi_3 = \xi_2 = \xi_1$ setzen. Wir erhalten:

$$A_4\xi_1^4 - 4A_3\xi_1^3 + 6A_2\xi_1^2 - 4A_1\xi_1 = 1 \qquad \text{(X)}$$

welche Gleichung nach ξ_1 aufgelöst, die vier Parameter solcher Punkte der Curve liefert, in denen diese von Ebenen in vier unendlich nahen Punkten geschnitten wird.

„Die Curve C besitzt vier stationäre Ebenen; ihre Berührungspunkte haben die Wurzeln der Gleichung X zu Parametern".

8. Bringt man die Curve C mit einem beliebigen Ebenenbüschel:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) - \mu(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4) = 0$$

in Verbindung, so erhält man für die Schnittpunkte der dem Parameter μ entsprechenden Ebene mit der Curve die Gleichung:

$$\xi^4[\Sigma\alpha_i a_i - \mu\Sigma\beta_i a_i] + \xi^3[\Sigma\alpha_i b_i - \mu\Sigma\beta_i b_i] + \xi^2[\Sigma\alpha_i c_i - \mu\Sigma\beta_i c_i] + \\ + \xi[\Sigma\alpha_i d_i - \mu\Sigma\beta_i d_i] + [\Sigma\alpha_i e_i - \mu\Sigma\beta_i e_i] = 0$$

welche Gleichung die vier Parameter-Werthe $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4$ der vier Schnittpunkte liefert. Diese Gleichung ist aber offenbar die Grundgleichung einer biquadratischen Involution, so dass wir sagen können:

„Die Ebenen eines Ebenenbüschels bestimmen auf C vierpunktige, eine biquadratische Involution bildende Gruppen."

Die sechs Doppelpunkte einer solchen Involution sind die Berührungspunkte der sechs, die Büschelaxe schneidenden Curventangenten. (Vergl. Art. 4.)

Wenn die Axe des Ebenenbüschels der Curve in einem Punkte begegnet, so gehört dieser allen jenen vierpunktigen Gruppen an, wesshalb die Involution in diesen Punkt und eine kubische Involution zerfallen muss.

„Die Ebenen eines Büschels, welches eine die Curve C einpunktig schneidende Axe besitzt, bestimmen auf der Curve eine kubische Involution von Punkten."

Hätte die Büschelaxe zwei Punkte mit C gemeinschaftlich, d. h. wäre sie eine zweipunktige Secante, so kommt man zu der quadratischen Involution des 4. Artikels zurück.

9. Schliesslich wollen wir auf Grund der letzten Entwicklung die Frage nach der von den dreipunktigen Secanten gebildeten Fläche erledigen. Um den Grad dieser Fläche zu finden, haben wir die Zahl der dreipunktigen Secanten der Curve zu bestimmen, welche eine beliebige Gerade im Raume schneiden. Zu dem Behufe nehmen wir die Gerade zur Axe eines Ebenenbüschels, welches nach dem vorhergehenden Artikel auf C eine biquadratische Involution bestimmt. Die dreipunktigen Secanten bestimmen, wie wir wissen, auf C eine kubische Involution, welche mit der biquadratischen sechs Paare entsprechender Punkte gemeinschaftlich hat. (Siehe Crelle, Bd. 72 „Über Involutionen höherer Grade" pag. 292.)

Jede Ebene des Büschels jedoch, welche eine dreipunktige Secante enthält, enthält ein ganzes Tripel der kubischen Involution, welches gleichzeitig einer Gruppe der biquadratischen Involution angehört.

Ein solches Tripel zählt aber für drei Paare entsprechender Elemente und somit absorbirt jede die Büschelaxe schneidende dreipunktige Secante drei, beiden Involutionen gemeinschaftliche Punktepaare. Da der letzteren im Ganzen sechs vorkommen, so erkennen wir, dass nur zwei dreipunktige Secanten eine beliebige Gerade schneiden. Es ist also in der That der Ort der dreipunktigen Secanten eine Fläche zweiten Grades, im Allgemeinen ein einmanteliges Hyperboloid.
